

MATEMATICA DISCRETA 2

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

A.A.: 2014/15

11 FEBBRAIO 2016

Innanzitutto si compilino i campi sottostanti

Totale	1	2	3	4	5

Cognome

Nome

Numero di Matricola

Poi si svolgono su foglio protocollo i seguenti esercizi e si risponde alla domanda di teoria. Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni. Non sono consentite attrezzature elettroniche di alcun tipo, incluse le calcolatrici tascabili e i telefoni cellulari, né libri, né appunti. Si consegni solo la bella copia, inserendo questo foglio all'interno.

Esercizio 1. Si dimostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ la seguente proprietà :

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \quad \forall n \geq 1$$

Esercizio 2. Determinare tutte le soluzioni (se esistono) del seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv 112 \pmod{72} \\ x \equiv 4 \pmod{330} \end{cases}$$

Si determini, motivando la risposta, se esiste una soluzione divisibile per 51.

[1984]₃₉₆₀
[NO]

Esercizio 3. Sia $A := \mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ e sia B il sottoinsieme $(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})^*$ di A formato dagli elementi invertibili modulo 16. Si calcoli la cardinalità dei seguenti insiemi:

(1) $X := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

[8]

(2) $Y := \{C \in 2^A \mid C \cap B = \emptyset\}$.

[2⁸]

(3) $Z := \{f \in A^A \mid f(B) = A \setminus B, f(A \setminus B) = B\}$

[8¹⁶].

Esercizio 4. Si dica, motivando la risposta, quale dei seguenti vettori

$$d_1 = (2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 8, 8) \quad d_2 = (1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 6, 6)$$

[d_1 : SI d_2 : NO]

è lo score di un grafo e, in caso lo sia, si costruisca un tale grafo applicando il teorema dello score.

Si dica inoltre se

i) esiste un tale grafo che sia anche un albero;

[NO]

ii) esiste un tale grafo che sia sconnesso;

[NO]

iii) esiste un tale grafo che sia Hamiltoniano.

[NO]

Esercizio 5 (Domanda di teoria). Si enunci e dimostri la relazione fondamentale dei grafi finiti (la somma dei gradi è pari al doppio del numero dei lati) e il lemma delle strette di mano.