

MATEMATICA DISCRETA 2

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

A.A.: 2014/15

11 FEBBRAIO 2016

Innanzitutto si compilino i campi sottostanti

Totale	1	2	3	4	5

Cognome

Nome

Numero di Matricola

Poi si svolgono su foglio protocollo i seguenti esercizi e si risponde alla domanda di teoria. Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni. Non sono consentite attrezzature elettroniche di alcun tipo, incluse le calcolatrici tascabili e i telefoni cellulari, né libri, né appunti. Si consegni solo la bella copia, inserendo questo foglio all'interno.

Esercizio 1. Si dimostri per induzione su $n \in \mathbb{N}$ la seguente proprietà :

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \quad \forall n \geq 1$$

Esercizio 2. Determinare tutte le soluzioni (se esistono) del seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv 112 \pmod{72} \\ x \equiv 4 \pmod{330} \end{cases}$$

Si determini, motivando la risposta, se esiste una soluzione divisibile per 51. [1984]₃₉₆₀ [NO]

Esercizio 3. Sia $A := \mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ e sia B il sottoinsieme $(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})^*$ di A formato dagli elementi invertibili modulo 16. Si calcoli la cardinalità dei seguenti insiemi:

- (1) $X := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. [8]
- (2) $Y := \{C \in 2^A \mid C \cap B = \emptyset\}$. [2⁸]
- (3) $Z := \{f \in A^A \mid f(B) = A \setminus B, f(A \setminus B) = B\}$ [8¹⁶].

Esercizio 4. Si dica, motivando la risposta, quale dei seguenti vettori

$$d_1 = (2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 8, 8) \quad d_2 = (1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 6, 6)$$

[d_1 : SI d_2 : NO]

è lo score di un grafo e, in caso lo sia, si costruisca un tale grafo applicando il teorema dello score.

Si dica inoltre se

- i) esiste un tale grafo che sia anche un albero; [NO]
- ii) esiste un tale grafo che sia sconnesso; [NO]
- iii) esiste un tale grafo che sia Hamiltoniano. [NO]

Esercizio 5 (Domanda di teoria). Si enunci e dimostri la relazione fondamentale dei grafi finiti (la somma dei gradi è pari al doppio del numero dei lati) e il lemma delle strette di mano.